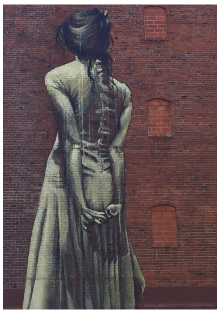
Infinis
« Capax Infiniti »

Infinis, Paradoxe, Cardinal, Ensembles dénombrables et non dénombrables, Théorème de Cantor-Berstein.

Hiérarchie de Cantor, Hypothèse du continu, Paradoxe de Berry, Antinomie de Russel,

Axiomatique ZFC, Axiome du choix et au delà…



CAPAX INFINITI, PORTLAND, 2014

Auteur : Olivier Raynaud

Sensibilité :

Référence :

1

Relation à l'infini

2

L'infini et ses paradoxes

- *Un paradoxe*
  - ✓ **En mathématique** les paradoxes sont aussi nommés *contradictions*, *inconsistances*, *antinomies*. Ils sont inacceptables dans un contexte logique.

Paradoxe : au sein d'une théorie, un paradoxe est la possibilité de démontrer une affirmation A et son affirmation contraire non A.

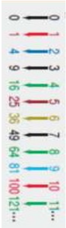
3

Paradoxe de la réflexivité

❑ *L'infini en temps qu'objet factuel*

✓ **Principe immédiat :** « … le tout est plus gros que chacune de ses parties propres

Paradoxe: « si un ensemble est infini il est possible de le mettre en correspondance un à un – on dit bijective ou bi univoque – avec une de ses parties propres. »



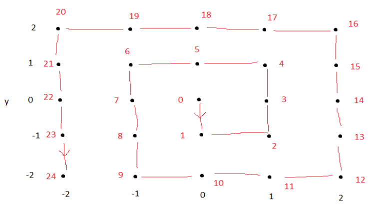


Image from [math.stackexchange.com]

4

Infini de la *contre intuition* à la *définition*

❑ *Les paradoxes de l'infini par Bernhard. Bolzano (1781-1848)*

✓ **Bolzano** propose de voir dans ces correspondances bijectives la caractéristique des totalités infinies .

Nouveau principe …un ensemble A strictement contenu dans un ensemble B a parfois la même taille.

❑ Que sont et à quoi servent les nombres ? (1988) *Richard Dedekind (1831-1916)*

✓ Dans cet ouvrage l'auteur introduit un grand nombre de **concepts ensemblistes** dont il donne des définitions rigoureuses.

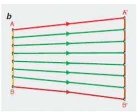
Définition : …un ensemble est infini s'il est équipotent à une de ses parties propres….

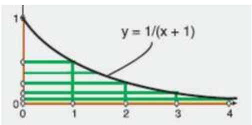
5

Observations de Cantor

❑ *Quelques cas flagrants à propos de l'ensemble des réels*

✓ **Correspondance** bijective entre deux segments de taille différente
✓ **Correspondance** bijective entre l'ensemble des réels et n'importe lequel de ses segments
✓ **Correspondance** bijective entre les points d'une surface plane et les points d'une courbe.





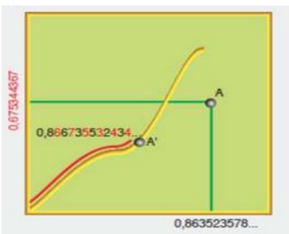
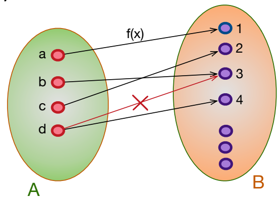


Image from [futura-sciences.com]

6

Taille des ensembles (1)

- *Comparaison des cardinaux respectifs d'ensembles*
  - **Injection** : une injection de **A** vers **B** est une application **f** telle que tout élément de A dispose de son propre élément dans B. Formellement pour tout couple d'éléments **a** et **b** de **A**, si **f(a) = f(b)** alors **a = b**.

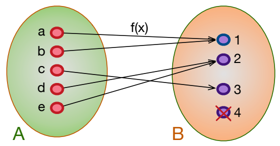


Propriété : S'il existe une **injection** d'un ensemble **A** vers un ensemble **B,** alors on dit que **B** est plus gros que **A.**

7

Taille des ensembles (2)

- *Comparaison des cardinaux respectifs d'ensembles*
  - **Surjection** : une surjection de **A** vers **B** est une application **f** qui atteint tout points de B. Formellement pour tout élément **b** de **B**, il existe un élément **a** de **A** tel que **f(a)=b**.



Propriété : S'il existe une **surjection** de l'ensemble **A** vers l'ensemble **B**, on dit que **A** est plus gros que **B.** Si de plus il n'existe pas de surjection de **B** vers **A**, on dit alors que **A** est strictement plus gros que **B**.

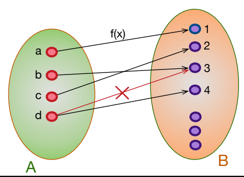
8

Taille des ensembles (3)

- *Comparaison des cardinaux respectifs d'ensembles*
- **Injection** : une injection de **A** vers **B** est une application **f** telle que tout élément de A dispose de son propre élément dans B.
- **Surjection** : une surjection de **A** vers **B** est une application **f** qui atteint tout points de B.

Propriété : S'il existe une application f **injective** et **surjective** d'un ensemble **A** vers l'ensemble **B,** alors **f** est bijective de **A** sur **B.**

Rappel
Injection de A dans B

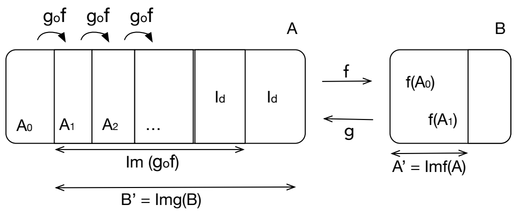


9

Taille des ensembles (4)

❑ *Comparaison des cardinaux respectifs d'ensembles*

Proposition [Théorème de Cantor-Bernstein] Si **A** et **B** sont deux ensembles et qu'il existe **une injection** de **A** dans **B** et une injection de **B** dans **A**, alors il existe une bijection de **A** sur **B**.



h(a) = g o f(a) si a est dans $U_{i>=0} A_i$ et **h(a) = a** sinon.

10

Fini et infini

❑ *Fini, infini et dénombrabilité*

✓ **Taille des ensembles (par l'intuition)** : L'existence de bijection ou d'injection entre des ensembles formalise la notion intuitive de nombres d'éléments, donc une notion de taille.

Définition (Equipotence) : Deux ensembles A et B sont dits en **bijection** ou **équipotents** s'il existe une bijection de A sur B.

Définition (fini, infini, dénombrable) : Un ensemble est dit **fini** s'il est vide ou en bijection avec un intervalle de $\mathbb{N}$ de la forme {1,2,...,p} ; un ensemble qui n'est pas fini est dit **infini**. Un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit **dénombrable**.

Proposition (cardinal) : Tout ensemble fini non vide A est en bijection avec un unique intervalle {1,2,...,p} de $\mathbb{N}$. L'entier p est appelé le cardinal de A. Si A est fini ou infini, son cardinal est noté |A| et 0 est appelé le cardinal de l'ensemble vide.

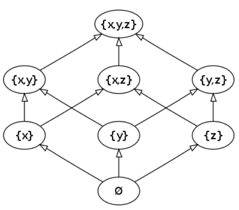
11

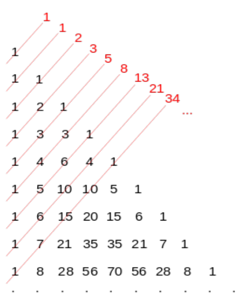
Ensemble des parties

❑ *Triangle de Pascal (1623-1662)*

✓ **Le triangle** est une représentation des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$



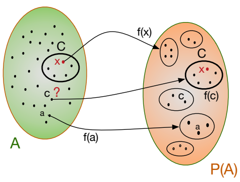


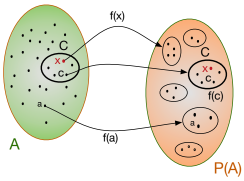
12

Infinité d'infinis

❑ *Cantor et les infinis (1845-1918)*

✓ **Théorème** [Cantor] *Soit un ensemble A, alors* $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.





C est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans leur image par f

Partant de $\mathbb{N}$, l'ensemble infini des nombres entiers, grâce au résultat ci-dessus on obtient une première échelle d'ensembles infinis : $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$...

13

L'argument diagonal de Cantor

❑ *Cantor et les infinis (1845-1918)*

✓ **Théorème** [Cantor] *Il n'existe pas de bijection* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *donc* $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

n	$f(n)$
1	0 . 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0...
2	8 . 5 0 0 6 0 7 0 8 6 6 6 9 0 0...
3	7 . 5 0 5 0 0 9 4 0 0 4 4 1 0 1...
4	5 . 5 0 7 0 4 0 0 8 0 4 8 0 5 0...
5	6 . 9 0 0 2 6 0 0 0 0 0 0 5 0 6...
6	6 . 8 2 8 0 9 5 8 2 0 5 0 0 2 0...
7	6 . 5 0 5 0 5 5 5 0 6 5 5 8 0 8...
8	8 . 7 2 0 8 0 6 4 0 0 0 0 4 4 8...
9	0 . 5 5 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 7 7...
10	0 . 5 0 0 2 0 7 2 2 0 7 8 0 5 1...
11	2 . 9 0 0 0 0 8 8 0 0 0 0 9 0 0...
12	6 . 5 0 2 8 0 0 0 8 0 0 9 6 7 1...
13	8 . 8 9 0 0 8 0 2 4 0 0 8 0 5 0...
14	8 . 5 0 0 0 8 7 4 2 0 8 0 2 2 6...
⋮	⋮

Extrait « Cardinality of Sets »

Notons $f(n)_0$, $f(n)_1 f(n)_2 ... f(n)_i$...
les décimales successives de $f(n)$

Soit le réel $x = 0, x_1 x_2 ... x_i ....$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } f(i)_i \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur l'exemple, on a $\mathbf{x} = \mathbf{0,01010001001000}$
x est construit pour ne pas être dans la liste

alors, pour tout n, x est différent de $f(n)$
$f()$ n'est donc pas surjective.

14

Quid du continu ?

❑ *Quelle est la place du continu dans la hiérarchie de Cantor ?*

✓ **Théorème** Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ont la même cardinalité

Eléments de démonstration :
D'après le théorème de C-B-S il suffit de trouver deux injections
f:]0,1) -> P(N) et **g: P(N) ->]0,1)**

a) Pour définir **f:]0,1) -> P(N)** on peut remarquer que tout nombre de **]0,1)** a une unique représentation décimale **0.$b_1b_2b_3b_4$...** où chaque **b_i** est un chiffre 0,1,2,...,9.

$$f(0.b_1b_2b_3b_4...) = \{10.b_1, 10^2.b_2, 10^3.b_3, ...\}$$

b) Pour définir **g: P(N) ->]0,1)** on associe à toute partie **X** de **N**, le nombre **g(X) = 0.$b_1b_2b_3b_4$...** tel que **b_i = 1** si **i** est dans **X** et **0** sinon.

15

Notation de Grands Cardinaux

- *Une infinité d'infinis (par intention)*
  - ✓ La théorie de Cantor propose une hiérarchisation des grands cardinaux $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$
- *Une infinité d'infinis (par construction)*
  - ✓ Il y a l'infini $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Cet infini est noté $\aleph_0$, et est dénommé l'infini **dénombrable**.
  - ✓ Il y a l'infini $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, il est noté $2^{\aleph_0}$. Cet ensemble se met en bijection avec $\mathbb{R}$ et constitue le continue.
  - ✓ Il y a encore l'infini $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Il est noté $2^{2^{\aleph_0}}$.

  etc

16

Hypothèse du continu – **H.C.**

- *Les hypothèses du continu,*
  - ✓ Disposant des deux hiérarchies, une question naturelle s'impose. Comment les deux hiérarchies coïncident-elles?

Hypothèse du continu (notée H.C.): tout sous ensemble infini de $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, se met en bijection avec $\mathbb{R}$ ou avec $\mathbb{N}$.
Autrement dit : $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ et $|\mathbb{R}| = \aleph_1$

Hypothèse du continu généralisée : il n'y a pas d'ensemble infini dont la cardinalité est intermédiaire entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.
Autrement dit : $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \ \aleph_2 = 2^{\aleph_1}, \ \aleph_3 = 2^{\aleph_2}, \ldots$

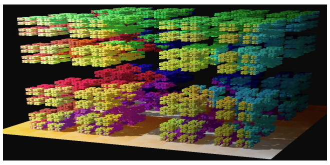
17

Paradoxe de Cantor

- *L'ensemble de tous les ensembles*
  - ✓ Fait admis "Il existe un ensemble de puissance supérieure à tout ensemble E, c'est l'ensemble de toutes ses parties".

Paradoxe : L'ensemble de tous les ensembles contient naturellement toutes ses parties, il est donc strictement plus gros que lui même.

Cette assertion est aussi absurde que 1 > 1.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Cantor_set.jpg

18

Slide en chantier

Système de Cantor

- *Axiomatisation des ensembles*

Définition (Ensemble) : Pour tout type τ, le type τ -> bool est noté Ens_τ , les objets de type Ens_τ sont appelés ensemble d'objets de type τ.
Pour x de type τ, et **A** de type Ens_τ , on dit que **x** est élément de **A**, noté **x** $\in_\tau$ **A**, si l'on a **A(x)** = **Vrai**

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Cantor_set.jpg

19

Paradoxe de Berry

- *Définition des ensembles par compréhension*

Proposition (Paradoxe de Berry) :
Si **P(n)** est la propriété "**n** peut être défini par une phrase française d'au plus cent caractères », il ne peut exister d'ensemble des entiers possédant la propriétés **P**.

Le paradoxe de Berry rend le système de Cantor intenable

Eléments de démonstration :
Soit **A** l'ensemble **{n : Entier| P(n)},** l'ensemble **A** a au plus 27^{100} éléments et son complémentaire est non vide.
Le complémentaire de **A** possède un plus petit élément appelé n_0; et n_0 n'est pas dans A.
La phrase "Je suis le plus petit entier non définissable par une phrase en français d'au plus cent caractères. » est une définition pour $\mathbf{n_0}$, qui comporte 96 caractères.
L'hypothèse de l'existence de A est a rejeter.

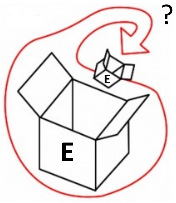
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Cantor_set.jpg

20

Antinomie de Russel

- *Les langues naturelles comme outils de définition*
  - ✓ L'ensembles des ensembles qui sont éléments d'eux-mêmes.
  - ✓ L'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes.

Paradoxe : L'ensemble **E** des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-même se contient-il ?



Si $E \in E$, alors par définition de E,
E ne se contient pas lui même $\to$ contradiction.

$\Updownarrow$

Si $E \notin E$, alors par définition de E,
E doit se contenir $\to$ contradiction.

Image [https://blog.sciencesetavenir.fr/statistique/statistique/paradoxe-du-barbier]/

21

Axiomatique ZF

❑*Axiomatique usuelle*

✓ Cette axiomatique est notée **ZF** en référence aux mathématiciens allemand et israélien Ernst Zermalo (1871-1953) et Abraham Fraenkel (1891-1965).

Elle est la forme standard de la théorie des ensemble.

22

Axiomatique

23

Théorie classique des ensembles: **ZF**

❑*Axiomatique usuelle* **Théorie de la limitation de taille** : l'existence d'une propriété commune à un groupe d'objets ne suffit plus pour définir un ensemble. Les ensembles se construisent soigneusement et progressivement

Axiome de la réunion : soit E un ensemble d'ensembles, le regroupement des éléments d'ensembles de E est lui-même un ensemble

Axiome de l'ensemble des parties : soit E un ensemble, le regroupement des sous ensembles de E est lui-même un ensemble.

Axiome de séparation : soit E un ensemble, et P() une propriété, les éléments de E vérifiant P() forment un ensemble.

Axiome de remplacement : soit E un ensemble, et f() une fonction sur E, alors l'image de E par f() forme un ensemble.

Axiome de l'infini : il existe au moins un ensemble infini.

24

Axiomatique ZFC

❑*La théorie des ensembles*

✓ Le système d'axiomes **ZFC** est considéré comme une base solide pour la théorie des ensembles et engendre une théorie non contradictoire.

Axiome du choix : Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction sur X, appelée fonction de choix, qui associe à chaque ensemble de X un élément de cet ensemble.

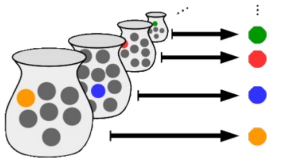


Image extraite de [fr.wikipedia.org/wiki/Axiome_du_choix]

25

Axiomatique ZFC

❑*La théorie des ensembles*

✓ L'axiome de fondation a été introduit par A. Fraenkel , T. Skolem (1922) et J.V. Neumann (1925)

Axiome de fondation : On appelle Axiome de fondation la condition suivante :

$$\forall a\ (a \neq \emptyset \Longrightarrow \exists b \in a\ (b \cap a = \emptyset))$$

Montrer que :

- un ensemble ne peut être élément de lui même;
- la relation d'appartenance n'a pas de cycle;
- l'on ne peut avoir une suite infinie d'ensembles inclus les uns dans les autres.

Image extraite de www.pourlascience.fr/sd/logique/lensemble-de-tous-les-ensembles

26

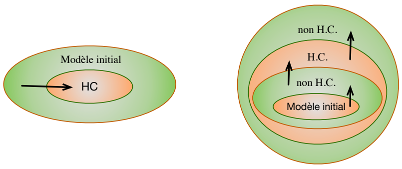
Indécidabilité

❑*Que faire de l'hypothèse du continu (H.C.)?*

✓ L'axiome H.C. est indépendant des autres (ZFC). On dit que H.C. est un indécidable dans ZFC.

Non réfutabilité : **H.C.** est non réfutable dans Z.F.C. sauf si Z.F.C. est contradictoire.
Godel 1938

Non démontrable : **H.C.** est non démontrable dans Z.F.C. sauf si Z.F.C. est contradictoire.
Cohen 1963



Extrait de Delahaye 2011

27

Maximaliste ontologique

- *Comment interpréter ces résultats?*
  - ✓ L'infini mathématique sera ce que l'on voudra qu'il soit…
  - ✓ La théorie ZFC n'est pas suffisante et l'on doit rechercher des axiomes complémentaires

Maximalisme : tout axiome qui affirme que l'univers des ensembles est grand doit être adopté, car l'univers des ensembles, s'il existe, n'est limité par aucun principe et est donc aussi grand que ce que tout est possible.

Image extraite de [https://www.futura-sciences.com/sciences/]

28

Axiomatique des grands cardinaux

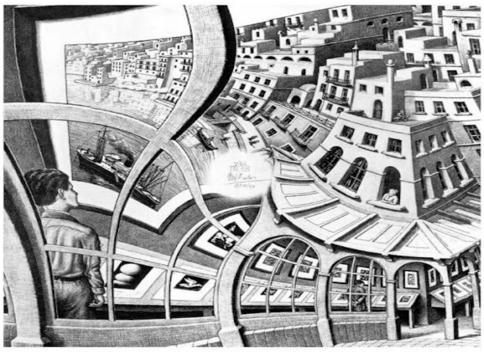
- *Quelques critères de sélections*
  - ✓ Les axiomes ne doivent pas introduire de contradiction;
  - ✓ Les axiomes doivent être conformes au maximalisme ontologique;
  - ✓ Les axiomes doivent stabiliser de nouvelles parties de l'univers des ensembles;

Alternative

Axiome d'antifondation :
Il permet de modéliser des situation d'autoréférence que AF exclu et d'élargir le concept d'ensemble en définissant la notion d'hyper ensemble.

29

La galerie des estampes



[M.C. Escher, 1956]

30

Pour résumer

- *Quelques points essentiels de l'exposé*
  - **L'infini :** définition, intuition et cardinalité
  - **Equipotence :** ensemble dénombrable, indénombrable et hypothèse du continu
  - **Paradoxes :** antinomie de Russel, paradoxe de Cantor et paradoxe de Berry
  - **Système Axiomatique ZFC :** Liste des axiomes, axiome du choix, axiome de fondation.
  - **Au délà du système ZF:** Maximalisme ontologiques, approche axiomatique, axiome d'antifondation et hyperensembles.

31

Bibliographie notoire

- *Ouvrages et liens de références* *exploités pour la réalisation de l'exposé.*

  - **La théorie des ensembles**, par P. Dehornoy, Calvet & Mounet, 2017.
    https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/conferences.html
  - **La logique, un aiguillon pour la pensée** par J.P. Delahaye
    Belin: pour la science, 2012;
  - **Wikipedia**
    Les références sont dans le texte.

32